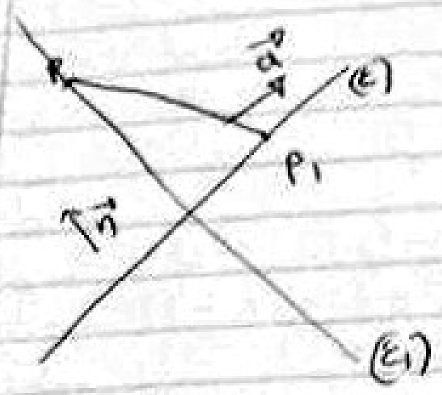


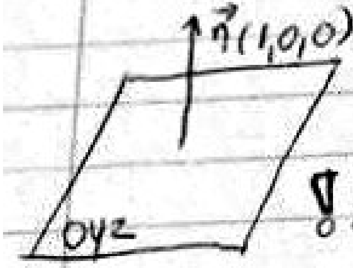
$\vec{a} \parallel \varepsilon = \vec{P_1P_2}(2,2,1)$

διάνυσμα $\vec{n} \perp \varepsilon$, $\vec{n} \parallel \varepsilon_1$

$\vec{n} = (\vec{PP_1} \times \vec{a}) \times \vec{a}$

πχ εξισώσεις όλων των ευθειών που διέρχ. από το $P(1,-2,3)$ και είναι $\parallel$ στο Oyz επίπεδο.

$(\varepsilon)\quad \dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y+2}{\beta} = \dfrac{z-3}{\gamma} \Rightarrow (\varepsilon): \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{\beta} = \dfrac{z-3}{\gamma}$



$1\cdot\alpha + 0\beta + 0\cdot\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

!! ή η $\beta = 0$ ή η $\gamma = 0$] Μία είναι η παράμετρος !!!

ΟΧΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ

πχ $x^2 + 3xy + 3xz + 2y^2 + 3yz = 0$ (στον χώρο)

$A(2,1,1)$ ζ μετατρέπεται

αρκεί νδο: σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων.

Νδο: παριστάνει ζεύγος επιπέδων και να βρούμε επίπεδο που περνά από το A και την τομή των 2 επιπέδων.

$$x^2 + 3(y+z)x + 2y^2 + 3yz = 0.$$

$$x = \frac{-3(y+z) \pm \sqrt{9(y+z)^2 - 4(2y^2+3yz)}}{2}$$

$$x = \frac{-3(y+z) \pm \sqrt{y^2 + 9z^2 + 6yz}}{2} = \frac{-3(y+z) \pm (y+3z)}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-2y}{2} = -y \\ \dfrac{-4y-6z}{2} = -2y-3z \end{cases}$$

Άρα, $1\cdot 3\lambda+2(2\lambda+4\mu)+5(-3\mu)=0 \Rightarrow 3\lambda-4\lambda+8\mu-15\mu=0$
$\Rightarrow -\lambda-7\mu=0 \Rightarrow \lambda=-7\mu.$

$\mu\neq 0,\ \lambda\neq 0.$

οπότε, $-7\mu\ (3x-2y+1)+\mu\,(4y-3z-5)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -21x+14y-7+4y-3z-5=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -21x+18y-3z-12=0.$

$$(\varepsilon'):\begin{cases}7x-6y+z-4=0.\\ x+2y+5z-1=0\end{cases}$$

<u>Δχ</u> $P(1,1,-2)$

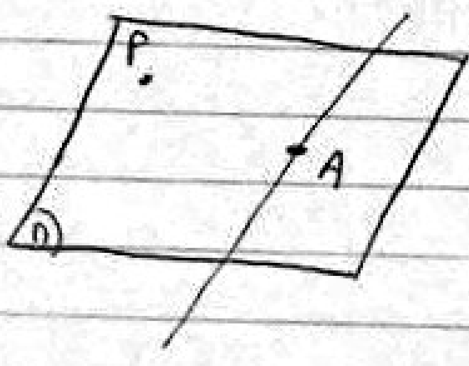
$$(\varepsilon)\begin{cases}2x-4z-3=0\\ y-2z+5=0\end{cases}$$

Παίρνω επίπεδο που περνά από το P και είναι ⊥ στην (ε)

⊥ στο παράλληλο διάνυσμα της (ε). $\vec{\alpha}$

$P_1\left(\frac{3}{2},-5,0\right)$

$P_2\left(\frac{7}{2},-3,1\right)$ $\quad (\varepsilon)\parallel\vec{\alpha}=\overrightarrow{P_1P_2}(2,2,1)$



$(\Pi):\ 2(x-1)+2(y-1)+1\cdot(z+2)=0$

$\boxed{(\Pi):\ 2x+2y+z-2=0}$

$A\in(\Pi)\cap(\varepsilon):\begin{cases}2x-4z-3=0\\ 2x+2y+z-2=0\\ y-2z+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2z+\frac{3}{2}\\ y=2z-5\\ \boxed{z=1}\end{cases}$

Άρα, $x=\frac{7}{2},\ y=-3,\ z=1$

$$\boxed{A\left(\frac{7}{2},-3,1\right)}$$

$d=|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{\frac{25}{4}+16+9}=\sqrt{\frac{25}{4}+25}=\sqrt{\frac{25+100}{4}}=\sqrt{\frac{125}{4}}$

$\overrightarrow{PA}\left(\frac{5}{2},-4,3\right)$

7

$x=2t+1$ $\quad t=1:\ P_1(1,2,1)$, $P_2(3,5,5)$

$y=3t+2$

$z=4t+1$

$(\varepsilon_1):\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{5}=t_1$

$A\in(\Pi)\cap(\varepsilon_1):\ \begin{cases} x=t_1+1 \\ y=2t_1+2t_1 \\ z=5t_1+1 \end{cases}$

$t+1+\ 4t+4+25t+5-1=0 \Rightarrow 30t=-9 \Rightarrow \boxed{t=-\frac{9}{30}}$

<u>και</u> $(\varepsilon_2)\ \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-5}{5}=t_2$

$B\in(\Pi)\cap(\varepsilon_2):\ \begin{cases} x=t_2+3 \\ y=2t_2+5 \\ z=5t_2+5 \end{cases}$

<u>2ος τρόπος</u>

$(\Pi_1)\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0$

Άρα, $(\varepsilon):\begin{cases}(\Pi_1)\\(\Pi)\end{cases}$

Αν δινόταν η ευθεία (ε) με αυτόν τον τρόπο

$(\varepsilon):\ \begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 4y-3z-5=0 \end{cases}$ $\quad P\left(-\frac{1}{3},0,-\frac{5}{3}\right)$ και $P'\left(\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right)$

$(\varepsilon)\parallel \vec{PP'}\left(\frac{2}{3},+1,\frac{4}{3}\right)\rightarrow(2,3,4)$ Και θα ακολουθούσαμε την ίδια διαδικασία.

ή// (Π): $\lambda(3x-2y+1)+\mu(4y-3z-5)=0$ αξονική δέσμη επιπέδων

επίπεδο το (Π): $3\lambda x+(-2\lambda+4\mu)y-3\mu z+\lambda-5\mu=0$

(Π')

$\vec{n}'(3\lambda,-2\lambda+4\mu,-3\mu)\perp\vec{n}(1,2,5)$

$\frac{x_2-1}{2}=\frac{-5}{3} \Rightarrow x_2= \dots$

$\frac{y_2+2}{2}=\frac{2}{3} \Rightarrow y_2= \dots$

$\frac{z_2+0}{2}=\frac{2}{3} \Rightarrow z_2= \dots$

2ος τρόπος

$\frac{x_2+1}{1}=\frac{y_2-2}{2}=\frac{z_2}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x_2=t-1 \\ y_2=2t+2 \\ z_2=-t \end{cases}$

$d(P_1,(\Pi))=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$d(P_2,(\Pi))=\frac{|x_2+2y_2-z_2+1|}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}} \Rightarrow |x_2+2y_2-z_2+1|=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |t-1+4t+4+t+1|=4 \Rightarrow |6t+4|=4 \Rightarrow 6t+4=\pm 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 6t+4=4 \\ 6t+4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t=0 \\ 6t=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3} \end{cases}$

για $t=0$: $\rightarrow P_1(-1,2,0)$

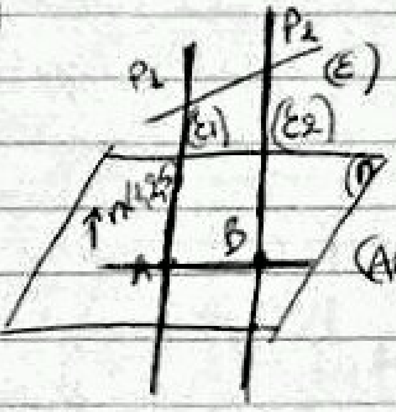
για $t=-\frac{4}{3} \rightarrow P_2\left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Πχ (ε): $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}=t$

(Π): $x+2y+5z-1=0$

οι εξισώσεις της προβολής

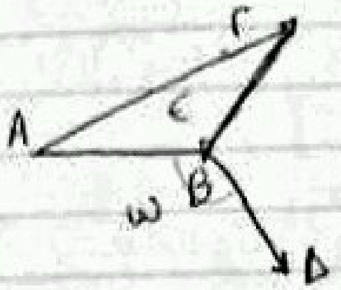
(2 εξισώσεις + μια ευθεία)



(AB): η προβαλλόμενη ευθεία

* Παίρνω τυχαίο σημείο στην (ε) φέρνω κάθετη στο επίπεδο (το προβάλλω) επαναλαμβάνω την διαδικασία. Βρίσκω λοιπόν, 2 σημεία και βρίσκω την ζητούμενη ευθεία.

Δx $A(1,1,1)$, $B(0,0,1)$, $\Gamma(3,3,0)$, $\Delta(1,0,0)$
$AB\Gamma$ ορίζουν τρίγωνο
$\hat{ABΔ}$



$$\left.\begin{matrix}\vec{AB}(-1,-1,0)\\ \vec{A\Gamma}(2,2,-1)\end{matrix}\right\} \vec{AB} \not\parallel \vec{A\Gamma} \text{ γιατί } \frac{-1}{2} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-1}$$

$$E = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \vec{x_0} & \vec{y_0} & \vec{z_0} \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-2\cdot 0)\vec{x_0} - (1-2\cdot 0)\vec{y_0} + (-2+2)\vec{z_0} = 1\vec{x_0} - 1\vec{y_0} + 0\vec{z_0} = (1,-1,0)$$

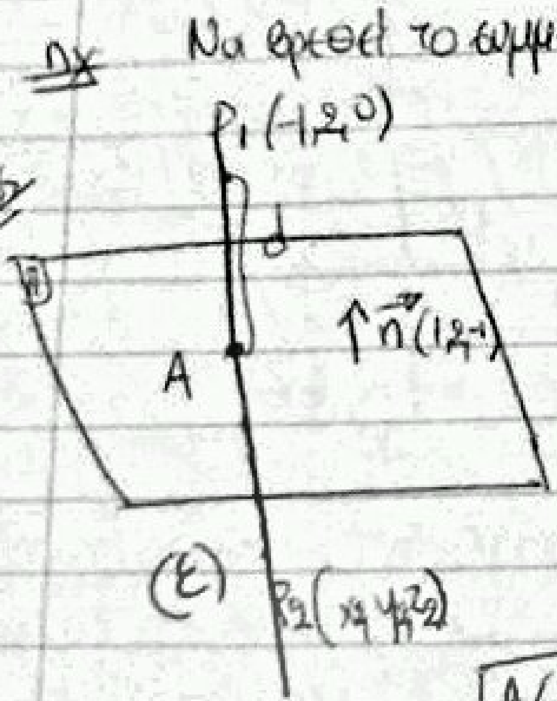
$$\text{συνω} = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{B\Delta}}{|\vec{BA}||\vec{B\Delta}|} = \frac{(1,1,0)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{συνω} = \text{συν}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\hat{\omega} = \pi/3}$$

$\vec{BA}(1,1,0)$ και $|\vec{BA}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$

και $|\vec{B\Delta}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{B\Delta}(1,0,-1)$ $\quad \vec{BA}\cdot\vec{B\Delta} = (1,1,0)(1,0,-1) = 1+0+0 = 1$.

Δx Να βρεθεί το συμμετρικό $P_1(-1,2,0)$ ως προς $(\Pi): x+2y-z+1=0$



$$d = \frac{|-1+2\cdot 2-0+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$(\varepsilon): \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+2 \\ z = -t \end{cases}$$

$A \in (\Pi) \cap (\varepsilon)$

$$t-1+4t+4+t+1=0 \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow \boxed{t = 2/3}$$

$$\boxed{A\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\hat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

$\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}\vec{\gamma} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu(\hat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) \\ \vec{\beta}\vec{\gamma} = |\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\hat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\gamma}$

$$\begin{vmatrix} |\vec{\alpha}|^2 + (\vec{\alpha}\vec{\beta}) & (\vec{\alpha}\vec{\gamma}) \\ |\vec{\beta}|^2 + (\vec{\alpha}\vec{\beta}) & (\vec{\beta}\vec{\gamma}) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists(\mu,\nu)\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$$

2ος τρόπος

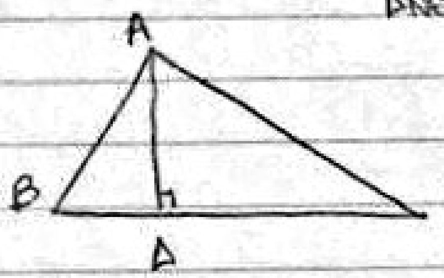
$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = [(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})]\cdot\vec{\gamma} = [(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\alpha} + (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\beta}]\vec{\gamma}$

$= [|\vec{\alpha}|^2\vec{\beta} - (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2\vec{\alpha}]\cdot\vec{\gamma} = |\vec{\alpha}|^2(\cancel{\vec{\beta}\vec{\gamma}}) - (\vec{\alpha}\vec{\beta})(\cancel{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}) +$
$+ (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\cancel{\vec{\beta}\vec{\gamma}}) - |\vec{\beta}|^2(\cancel{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}) = 0$

$\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow (\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ απορ.
$\vec{\gamma} = 0$ απορ.

$\boxed{\text{Άρα, } \vec{\alpha}-\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}}$

Ορθ.



Δίνεται $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

ΝΔΟ $(B\Gamma\Delta) = \dfrac{\gamma\sigma\upsilon\nu B}{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, $|\vec{A\Gamma}| = \beta$, $|\vec{AB}| = \gamma$

1ο 3ο = λ· 3ο 2ο

$(B\Gamma\Delta) = \lambda \Rightarrow \vec{B\Delta} = \lambda\vec{\Delta\Gamma}$

$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{|\vec{B\Delta}|}{|\vec{AB}|} = \dfrac{|\vec{B\Delta}|}{\gamma} \Rightarrow |\vec{B\Delta}| = \gamma\sigma\upsilon\nu B$ ①

$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{|\vec{\Gamma\Delta}|}{|\vec{A\Gamma}|} = \dfrac{|\vec{\Gamma\Delta}|}{\beta} \Rightarrow |\vec{\Gamma\Delta}| = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ②

$\overset{(\frac{1}{2})}{\Rightarrow} \dfrac{\gamma\sigma\upsilon\nu B}{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \dfrac{|\vec{B\Delta}|}{|\vec{\Gamma\Delta}|} = \dfrac{(\vec{B\Delta})}{(\vec{\Delta\Gamma})} = (B\Gamma\Delta)$

Άρα, $\vec{\gamma}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ και $\vec{\delta}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

Άρα, $\boxed{(\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} -1/4 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 \\ 1/4 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{vmatrix}}$

13/1/14

Πχ. $\vec{a}, \vec{b}$ $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$

$|\vec{a}-\vec{b}|=30 \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = ;$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = 121+529-2\cdot\frac{250}{2}$

$|\vec{a}-\vec{b}|=30 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2=900 \Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}=900 \Rightarrow$

$\Rightarrow 121+23^2-2\vec{a}\vec{b}=900 \Rightarrow$

$\Rightarrow 121+529-2\vec{a}\vec{b}=900 \Rightarrow -2\vec{a}\vec{b}=900-121-529$

$-2\vec{a}\vec{b}=250 \Rightarrow \boxed{\vec{a}\vec{b}=-\frac{250}{2}}$

Άρα, $|\vec{a}+\vec{b}|^2=121+529-250=400$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=400 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}+\vec{b}|=20}$

Πχ. $\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}$ του $\mathbb{R}^3$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$ $\vec{a}\nparallel\vec{b}$

$(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})=(\widehat{\vec{b},\vec{\gamma}}) \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{\gamma}$ γραμμ.εξαρτημένα

1ος τρόπος

$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})+\mu(\vec{a}+\vec{b})+\nu\vec{\gamma}=0 \xrightarrow{\cdot\vec{a}}$

$\lambda\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{0}+\mu(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+\nu\cdot\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=0.$

$\mu|\vec{a}|^2+\mu\vec{a}\cdot\vec{b}+\nu\cdot\vec{a}\vec{\gamma}=0. \Rightarrow \mu\left[|\vec{a}|^2+\vec{a}\vec{b}\right]+\nu(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})=$

$\xrightarrow{\cdot\vec{b}}$

$\lambda\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}}_{0}+\mu(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}+\nu\cdot\vec{b}\cdot\vec{\gamma}=0.$

$\mu\vec{a}\vec{b}+\mu|\vec{b}|^2+\nu\cdot\vec{b}\vec{\gamma}=0 \Rightarrow \mu\left[|\vec{b}|^2+\vec{a}\vec{\gamma}\right]+\nu(\vec{b}\cdot\vec{\gamma})$

i) $\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \neq \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ Άρα, γραμμ. ανεξάρτητα

ii) $A = [(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b} - |\vec{b}|^2\,\vec{a}]\,\vec{a}$
$= (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 \Rightarrow \boxed{A = -3/4}$

• $|\vec{a}| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}} = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{16} + \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$

και $B = [\vec{a} \times (|\vec{a}|^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a})] \times \vec{a}$
$= [|\vec{a}|^2(\vec{a}\times\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})\underbrace{(\vec{a}\times\vec{a})}_{0}] \times \vec{a}$

$= |\vec{a}|^2(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = |\vec{a}|^2(|\vec{a}|^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a})$

$B = |\vec{a}|^4\vec{b} - |\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \ldots$

Έστω • $\vec{\gamma}(x, y, z)$
• $|\vec{\gamma}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ①

• $\text{συν}\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{1}{2} = \text{συν}(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{a}||\vec{\gamma}|} = \text{συν}(\widehat{\vec{b},\vec{\gamma}}) = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{\gamma}|}$

Δηλαδή, $\vec{a}\cdot\vec{\gamma} = \frac{1}{2}$ και $\vec{b}\cdot\vec{\gamma} = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z = \frac{1}{2}$ ②

$\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{4}z = \frac{1}{2}$ ③

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\gamma} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) > 0$

$\sqrt{3}y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\frac{1}{4}x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}z \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{3}z}$

$\overset{①}{\Rightarrow} 3z^2 + \frac{1}{3} + z^2 = 1 \Rightarrow 4z^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \boxed{z = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}}$ και $x = \pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{6} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$E = 4\,(E_{τριγ}\, M\hat{B}Γ) = 4 \cdot \frac{1}{2}\, |\vec{MB} \times \vec{MΓ}| = 2 \left| \frac{1}{2} \vec{BΔ} \times \frac{1}{2} \vec{AΓ} \right| = \frac{1}{2} |\vec{AΓ} \times \vec{BΔ}|$

2ος τρόπος

$= \frac{1}{2} |(2\vec{e_1} - \vec{e_2}) \times (4\vec{e_1} - 5\vec{e_2})| = \frac{1}{2} |-10(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) + 4(\vec{e_1} \times \vec{e_2})|$

$= \frac{1}{2} |-6(\vec{e_1} \times \vec{e_2})| = 3 |\vec{e_1} \times \vec{e_2}| = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λεπτό σημείο! θέτω τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ για ευκολότερες πράξεις

* θέτω

$\vec{a} = (\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \times \vec{e_1} \qquad \vec{b} = \vec{e_2}$

• $συν(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\left(\vec{e_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}\right)\vec{e_2}}{|\vec{e_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}||\vec{e_2}|} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \cdot 1}$

$\vec{a} = (\vec{e_1} \cdot \vec{e_1})\vec{e_2} - (\vec{e_1} \cdot \vec{e_2})\vec{e_1} = |\vec{e_1}|^2 \vec{e_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1} = \vec{e_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}$

$\vec{b} = \vec{e_2}$

• Άρα, $συν(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} - 1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\Rightarrow συν\left[\widehat{(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \times \vec{e_1}, \vec{e_2}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα, $\boxed{\left[\widehat{(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \times \vec{e_1}, \vec{e_2}}\right] = \frac{\pi}{4}}$

$\boxed{4}$ $\vec{a}\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad \vec{b}\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

i) Ισα. $\vec{a}, \vec{b}$ γραμ. ανεξάρτητα

ii) $A = [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}] \cdot \vec{a}$ και $B = [\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}))] \times \vec{a}$

iii) $\vec{γ}$; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{γ}|$ ώστε $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{γ}}) = (\widehat{\vec{γ}, \vec{a}})$ και $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{γ})$ να ορίζει δεξιόστροφο σύστημα

Αν $\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα $\Rightarrow$ είναι τα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ γραμ. ανεξ.

1ος τρόπος *

$\boxed{\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}+\nu\vec{z}=0}$ ①

Λεπτό σημείο !* Αν $\vec{\alpha}=\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{\beta}=\vec{y}+\vec{z}$, $\vec{\gamma}=\vec{z}+\vec{x}$ γραμ. ανεξάρτητα τότε

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}+\vec{y}=\vec{\alpha}\\ \vec{y}+\vec{z}=\vec{\beta}\\ \vec{z}+\vec{x}=\vec{\gamma}\end{array}\right| \overset{+}{\Rightarrow} 2(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$$

επ.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{z}=\frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha})\\ \vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma})\\ \vec{y}=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma})\end{array}}$$ ②

η ① $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\lambda\cdot\frac{1}{2}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma})+\mu\cdot\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma})+\nu\cdot\frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha})=0$

$\Rightarrow (\lambda+\mu-\nu)\vec{\alpha}+(-\lambda+\mu+\nu)\vec{\beta}+(\lambda-\mu+\nu)\vec{\gamma}=0 \xRightarrow[\text{ανεξαρτ.}]{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\text{ γραμ.}}$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda+\mu-\nu=0\\ -\lambda+\mu+\nu=0\\ \lambda-\mu+\nu=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nu=0\\ \mu=0\\ \lambda=0\end{cases}$ Άρα, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα

2ος τρόπος

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ γραμ. ανεξαρτητα $\Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0$

$(\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x})$

$= (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{x}, \vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{z}, \vec{z}+\vec{x})$

$= (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + \underbrace{(\vec{x}, \vec{y}, \cancel{\vec{x}})}_{0} + \underbrace{(\vec{x}, \cancel{\vec{z}}, \vec{x})}_{0} + (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) =$

$= (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0$

ii) $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\times[(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{b}] = [|\vec{a}|^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}]\times[|\vec{b}|^2\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}]$

$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\,\vec{b}\times\vec{a} - (\vec{a}\vec{b})|\vec{b}|^2(\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}) - |\vec{a}|^2(a\times b)(\cancel{\vec{b}\times\vec{b}}) + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2(\vec{a}\times\vec{b})$

$= \left[(\vec{a}\vec{b})^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\right](\vec{a}\times\vec{b}) = -|\vec{a}\times\vec{b}|^2\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

$(\vec{a}\vec{b})^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})-1)$

$= -|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

$\boxed{2}$ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ γραμ ανεξάρτητα $\Rightarrow$ $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{x}$ γραμ. ανεξαρτ.

Ισχύει ο " $\Leftarrow$ " ;;

i) έστω a, b, γ $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{\gamma}=0 \Rightarrow \lambda=\mu=\nu=0$ και μόνο $\Rightarrow$ γραμ.ανεξ.

2 τρόποι

Αν $\exists\ (\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$ γραμ. εξαρτημένα

ii) $(\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma})\neq 0 \Rightarrow$ γραμ ανεξάρτητα
$(\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma})=0 \Rightarrow$ γραμ. εξαρτημ.

Έστω $\lambda(\vec{x}+\vec{y})+\mu\cdot(\vec{y}+\vec{z})+\nu(\vec{z}+\vec{x})=0$

$(\lambda+\nu)\vec{x}+(\lambda+\mu)\vec{y}+(\mu+\nu)\vec{z}=0 \xrightarrow[\text{ανεξαρτ.}]{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\text{ γραμ}}$

$$\begin{cases}\lambda+\nu=0\\ \lambda+\mu=0\\ \nu+\mu=0\end{cases}$$ $\leftarrow$ ομογενές σύστημα 3 εξισώσεων

→ με ορίζουσες
→ με επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases}1\cdot\lambda+0\cdot\mu+1\cdot\nu=0\\ 1\lambda+1\cdot\mu+0\nu=0\\ 0\cdot\lambda+1\cdot\mu+1\cdot\nu=0\end{cases}\qquad D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix} \Rightarrow D=1+1=2\neq 0$$

$\Rightarrow \lambda=\mu=\nu=0$ μοναδική. Άρα, $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{x}$ είναι γραμ ανεξ.

$\boxed{\kappa, \lambda \text{ μία σχέση}}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) = (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{\gamma}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{\gamma} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}$$

$$(\vec{b} \times \vec{\gamma}) \times \vec{a} = -\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma})$$

$\boxed{10|11|14}$

$\boxed{1}$ ΝΔΟ: i) $\left\{\left[\left(\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{a}\right)\times\vec{a}\right]\times\vec{a}\right\}\times\vec{a} = |\vec{a}|^4\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

ii) $\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}\right]\times\left[\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}\right] = -|\vec{a}\times\vec{b}|^2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

i) $\left\{\left[\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a} - \left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\right)\times\vec{a}\right]\times\vec{a}\right\}\times\vec{a} = \left\{\left(-|\vec{a}|^2\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{a}\right\}\times\vec{a} =$

$= -\left\{|\vec{a}|^2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{a}\right\}\times\vec{a} = -|\vec{a}|^2\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b}\right)\times\vec{a} = |\vec{a}|^4\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

17/1/14 $A(1,2,-1)$, $B(2,2,-\frac{1}{2})$, $\Gamma(-1,-2,-5)$, $\Delta(-1,0,-7/2)$

α) Νδο είναι συνεπίπεδα

β) Ε τετραπλεύρου ΑΒΓΔ

γ) διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$

δ) Να βρεθούν οι εξισώσεις του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

1ος τρόπος

$(AB): \dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-2}{2-2} = \dfrac{z+1}{-\frac{1}{2}+1} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+1}{\frac{1}{2}}$

$\Gamma \notin (AB)$ Δεν είναι συνευθειακά

ή

$\vec{AB}(1,0,1/2)$

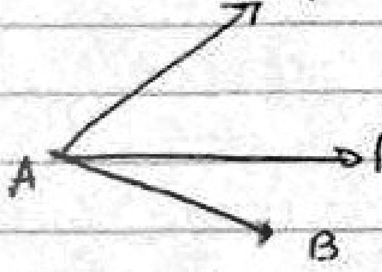
$\vec{A\Gamma}(-2,-4,-4)$

$-\frac{1}{2} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{\frac{1}{2}}{-4}$ τα $\vec{AB} \nparallel \vec{A\Gamma}$

$$(\Pi): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)+3(y-2)-4(z+1)=0$$

$\Leftrightarrow \boxed{(\Pi): 2x+3y-4z-12=0}$

$\Delta \in (\Pi)$ Άρα Α, Β, Γ, Δ είναι συνεπίπεδα



$\vec{AB}(1,0,1/2)$

$\vec{A\Gamma}(-2,-4,-4)$

$\vec{A\Delta}(-2,-2,-5/2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -5/2 \end{vmatrix} = 0$$

$\overrightarrow{P_1P_2}\ (-3,4,-1)$

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3(4+3)-4(2-6)-1(-1-4)$$
$$= -21+16+5=0$$

Άρα, οι (ε_1) και (ε_2) είναι συμβατές

$\vec{a} \parallel \vec{b}$;

$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{3}{2}$ Άρα, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

η (ε_1) και (ε_2) τέμνονται

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 3y-2z-7=0 \\ -x-2y+8=0 \\ 2y+z-7=0 \end{cases} \Rightarrow A(\ldots,\ldots,\ldots)$$

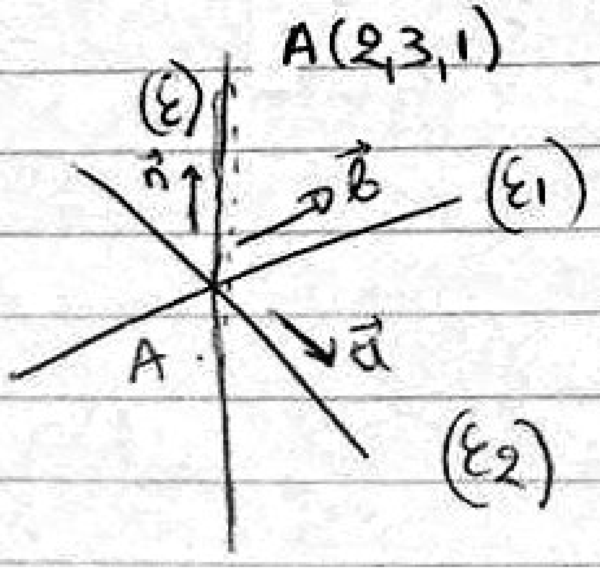
ii/ (ε_1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} = t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=3t-2 \end{cases}$

(ε_2): $\frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+3}{2} = t_1$ $\begin{cases} x=2t_1-2 \\ y=-t_1+5 \\ z=2t_1-3 \end{cases}$

$2t-3=-1 \Rightarrow \boxed{t=1}$

και $t_1=2$

$A(2,3,1)$



$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

(ε): $\frac{x-2}{n_1} = \frac{y-3}{n_2} = \frac{z-1}{n_3}$

$(AB\Gamma) = \lambda \Rightarrow \vec{A\Gamma} = \lambda \vec{\Gamma B}$ $\left(\frac{-26}{20} = \frac{-13}{10} = \frac{-26}{20} \right)$

Λεπτό σημείο!! $\vec{A\Gamma}\left(\frac{26}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{26}{3}\right)$ $\vec{A\Gamma} \parallel \vec{\Gamma B}$

$\vec{\Gamma B}\left(-\frac{20}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)$

$$\left(\frac{26}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{26}{3}\right) = \lambda\left(-\frac{20}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)$$

$$\frac{26}{3} = -\frac{20}{3}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-26}{20} \Rightarrow \lambda = -\frac{13}{10}$$

(β) $\vec{A\Gamma} = \lambda \vec{\Gamma B} \rightarrow |\vec{A\Gamma}| = |\lambda||\vec{\Gamma B}|$ $|\lambda| = \frac{\alpha}{\beta}$

$|\vec{A\Gamma}| = \frac{1}{3}\sqrt{26^2+13^2+26^2} = \alpha > 0$

$\boxed{\lambda = \pm \frac{\alpha}{\beta}}$

$|\vec{\Gamma B}| = \frac{1}{3}\sqrt{20^2+10^2+20^2} = \beta > 0$

για το A $2\cdot1 - 0 + 3\cdot2 + 5 = 2+6+5 = 13 > 0$ +

για το B $2\cdot3 - 1 + 3\cdot0 + 5 = 6-1+5 = 10 > 0$ +

Άρα, $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{\beta}}$

(συμμετρική ευθείας ως προς επίπεδο
παίρνω 2 σημεία της ευθείας, βρίσκω τα συμμετρικά τους
και μετά βρίσκω τη ζητούμενη ευθεία)

ΠΧ Να νδο οι (ε_1) και (ε_2) είναι συμβατές $(\varepsilon_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$
και $(\varepsilon_2): \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+3}{2}$ $A \in (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)$
Στη συνέχεια να βρεθεί η ευθεία (ε) $A \in (\varepsilon)$ και $(\varepsilon) \perp (\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

$P_1(1,1,-2)$ $P_2(-2,5,-3)$ αρκεί να πάρουμε το $(\vec{P_1P_2}, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$

$\vec{\alpha}(1,2,3)$ $\vec{\beta}(2,-1,2)$ και αν είναι $0 \rightarrow$ συμβατές οι $(\varepsilon_1)(\varepsilon_2)$

και αν είναι $\neq 0 \Rightarrow$ ασύμβατες οι $(\varepsilon_1)(\varepsilon_2)$

$x = 3t+1$
$y = 8t+2$
$z = t+3$

$3(3t+1) + 8(8t+2) + t+3-12=0$
$9t+3 + 64t+16 + t+3-12=0$
$74t+10=0 \Rightarrow t = -\frac{10}{74} \Rightarrow \boxed{t = -\frac{5}{37}}$

$A\left(-\frac{15}{37}+1, -\frac{40}{37}+2, -\frac{5}{37}+3\right) \Rightarrow A\left(\frac{22}{37}, \frac{34}{37}, \frac{106}{37}\right)$

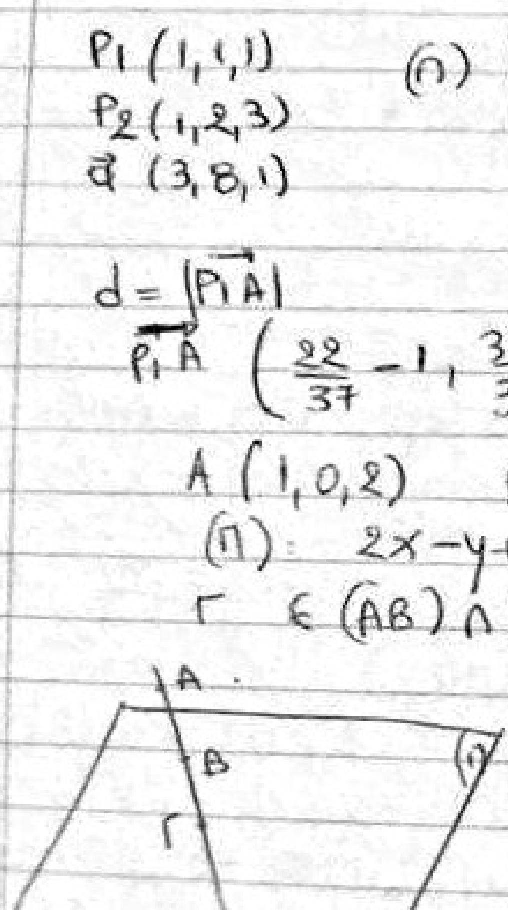
$$\left.\begin{array}{ll} \frac{x_0+1}{2} = \frac{22}{37} & \frac{z_0+1}{2} = \frac{106}{37} \\ \frac{y_0+1}{2} = \frac{34}{37} & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = \dots \\ y_0 = \dots \\ z_0 = \dots \end{array}$$

$P_1(1,1,1)$
$P_2(1,2,3)$
$\vec{d}(3,8,1)$

$(\Pi) \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\Pi)$.

$d = |\vec{P_1A}|$
$\vec{P_1A}\left(\frac{22}{37}-1, \frac{34}{37}-1, \frac{106}{37}-1\right)$

$A(1,0,2) \quad B(3,1,0)$
$(\Pi): 2x-y+3z+5=0$
$\Gamma \in (AB) \cap (\Pi) \qquad (AB\Gamma) = \lambda = ;$



$(AB)(\varepsilon): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t \\ z = -2t+2 \end{cases}$

$4t+2-t-6t+6+5=0 \Rightarrow -3t+13=0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{13}{3}}$

$\boxed{\Gamma\left(\frac{29}{3}, \frac{13}{3}, \frac{-20}{3}\right)}$

$(x+y)\cdot(x+2y+3z)=0$

$(\Pi_1): x+y=0$

ή $x+2y+3z=0$

(Π_2)

$O(0,0,0) \in (\Pi_1)$ και (Π_2)

$B(1,-1,1/3)$

$$(\Pi): \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2-0 & 1-0 & 1-0 \\ 1-0 & -1-0 & 1/3-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1/3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\frac{1}{3}+1\right) - y\left(\frac{2}{3}-1\right) + z\left(-2-1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3}x + \frac{y}{3} - 3z = 0$$

η)

$$\lambda(x+y)+\mu(x+2y+3z)=0$$

$$3\lambda+7\mu=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{3}\mu$$

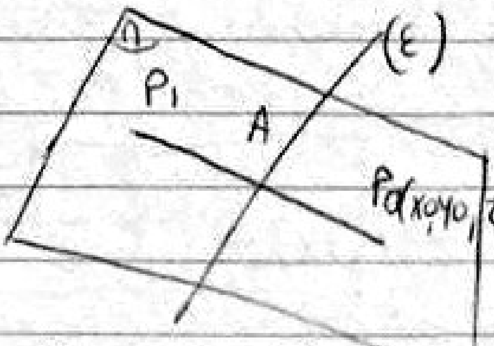
$$-\frac{7}{3}(x+y)+(x+2y+3z)=0.$$

* Άσκ Να βρεθεί το συμμετρικό του P_1 ως προς την (ε) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{1}$.

Να βρεθεί η εξ. επιπέδου που περιέχει την (ε) το σημείο P_1

Να βρεθεί η απόσταση του P_1 από την (ε)

Φέρω επίπεδο περνά από P_1 και θα είναι ⊥ στην (ε)



$(\varepsilon) \parallel \vec{a}\,(3,8,1)$

$(\Pi): 3(x-1)+8(y-1)+1(z-1)=0 \Rightarrow (\Pi): 3x+8y+z-12=0$

$A \in (\Pi)\cap(\varepsilon)$